HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 14

Der Übertrager als Zweipolnetz

Dr.-Ing. WILHELM KLEIN

1957

Technischer Bericht Nr. 14

Der Uebertrager als Zweipolnetz

Zusammenfassung

Zur rationellen Ermittlung der Vierpoleigenschaften einer linearen Schaltung geht man von der Mehrpolleitwertmatrix aus, wie im Technischen Bericht 8 ausgeführt ist. Da diese für ein Zweipolnetz ohne weiteres hinzuschreiben ist, ist es zweckmässig, auch die in der Schaltung enthaltenen Uebertrager als Zweipolnetze darzustellen. Das ist möglich, wenn man auch negative Zweipole zulässt. Es werden für verschiedene Uebertragerarten die äquivalenten Zweipolnetze abgeleitet.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter
gez: Klein
(Dr.-Ing. Wilh. Klein)

Der Abteilungsleiter
gez: Rothert
(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Der Institutsdirektor
gez: Rothert
(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 15. Juli 1957

Der Uebertrager als Zweipolnetz

1. Aufgabenstellung

Im Technischen Bericht Nr. 8 wurde gezeigt, dass man die Vierpoleigenschaften verwickelterer Schaltungen am zweckmässigsten so erhält, dass man aus der Mehrpolleitwertmatrix gewisse Determinanten berechnet. Da die Aufstellung der Mehrpolleitwertmatrix besonders einfach für Schaltungen ist, die nur aus Zweipolen bestehen (sog. Zweipolnetze), wird man nach Möglichkeit auch die in der Schaltung enthaltenen Uebertrager durch Zweipolnetze darstellen. In dem erwähnten Bericht wurde für einen besonders häufigen Fall (idealer Sparübertrager) die Ersatzschaltung bereits angegeben. Wir wollen hier von einem allgemeineren Standpunkt für weitere Uebertragerschaltungen die äquivalenten Schaltungen ableiten.

Ein Uebertrager besteht aus zwei oder mehr magnetisch gekoppelten Wicklungen, er ist daher mindestens ein Dreipol. Wir werden zeigen, wie man diese Dreipole, Vierpole usw. durch Zweipolnetze darstellen kann, wenn man auch negative Zweipole zulässt. Mit diesen lässt sich genau so rechnen wie mit den üblichen positiven Zweipolen.

Wir betrachten zunächst ideale Uebertrager, d.h. verlustlose und streuungslose Uebertrager mit unendlich hoher Induktivität. Sie sind bei zwei Wicklungen durch eine einzige Zahl, das Windungsverhältnis ü, gekennzeichnet. Weiter unten werden wir dann auch nichtideale Uebertrager behandelm.

2. Der Negativdualübersetzer

In den Zweipolnetzen, die als Ersatzbilder der idealen Uebertrager dienen, tritt als wesentliches Element eine X-Schaltung auf, die wir hier zunächst gesondert betrachten wollen. Sie besteht nach Abb. 1 aus dem Leitwert g, den beiden negativen Leitwerten -g und dem zunächst beliebigen Leitwert g_o. Wenn man an den beiden Klemmen 34 dieser Schaltung einen Leitwert G anschliesst, so misst man an den Klemmen 12 den Leitwert $-g^2/G$,

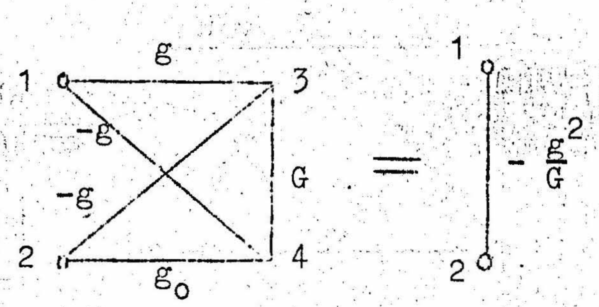

Abb. 1. Negativdualübersetzer

wie man z.B. durch Stern- und Dreiecksumwandlung des Knotens 3 oder 4 nachweisen kann. Die X-Schaltung, Abb. 1, bewirkt also eine Umsetzung auf den dualen Leitwert, aber mit negativem Vorzeichen, so dass wir dieses Schaltelement als <u>Negativdualübersetzer</u>[1] bezeichnen wollen. Ist insbesondere 34 kurzgeschlossen ($G = \infty$), dann ist 12 offen und umgekehrt, bei Leerlauf an 34 ($G = 0$), ist 12 kurzgeschlossen.

Bemerkenswert ist, dass der Eingangsleitwert 12 $-g^2/G$ unabhängig von dem in der Schaltung enthaltenen Leitwert g_o ist. Solange es also nur auf das Vierpolverhalten der Schaltung an den Klemmen 12/34 ankommt, kann man g_o beliebige Werte erteilen, auch die Werte 0 und ∞, d.h. Leerlauf oder Kurzschluss zwischen 2 und 4. In den Leitwert zwischen 2 und 4 geht g_o natürlich ein. Es ist nämlich $y_{24} = g_o - g$ (unabhängig von G). Macht man also z.B. $g_o = g$, dann ist $y_{24} = 0$, d.h., die Schaltung wirkt, als wenn zwischen 2 und 4 eine Unterbrechung wäre.

3. Der ideale Uebertrager mit zwei getrennten Wicklungen

Durch Kettenschaltung zweier Negativdualübersetzer erhalten wir ein Zweipolnetzwerk, das einen idealen Uebertrager mit zwei getrennten Wicklungen darstellt (Abb. 2). Man sieht das folgender-

---

[1] Es gibt auch einen "Positivdualübersetzer", nämlich den sog. Gyrator, denn dieser übersetzt einen Leitwert G in $+g^2/G$. GENSEL [2] bezeichnet die Schaltung Abb. 1 daher als Negativ-Gyrator. Der Gyrator gehört allerdings zu den übertragungsunsymmetrischen Vierpolen, lässt sich also nicht als Zweipolnetz darstellen und ist demnach für unsere Zwecke nicht brauchbar.

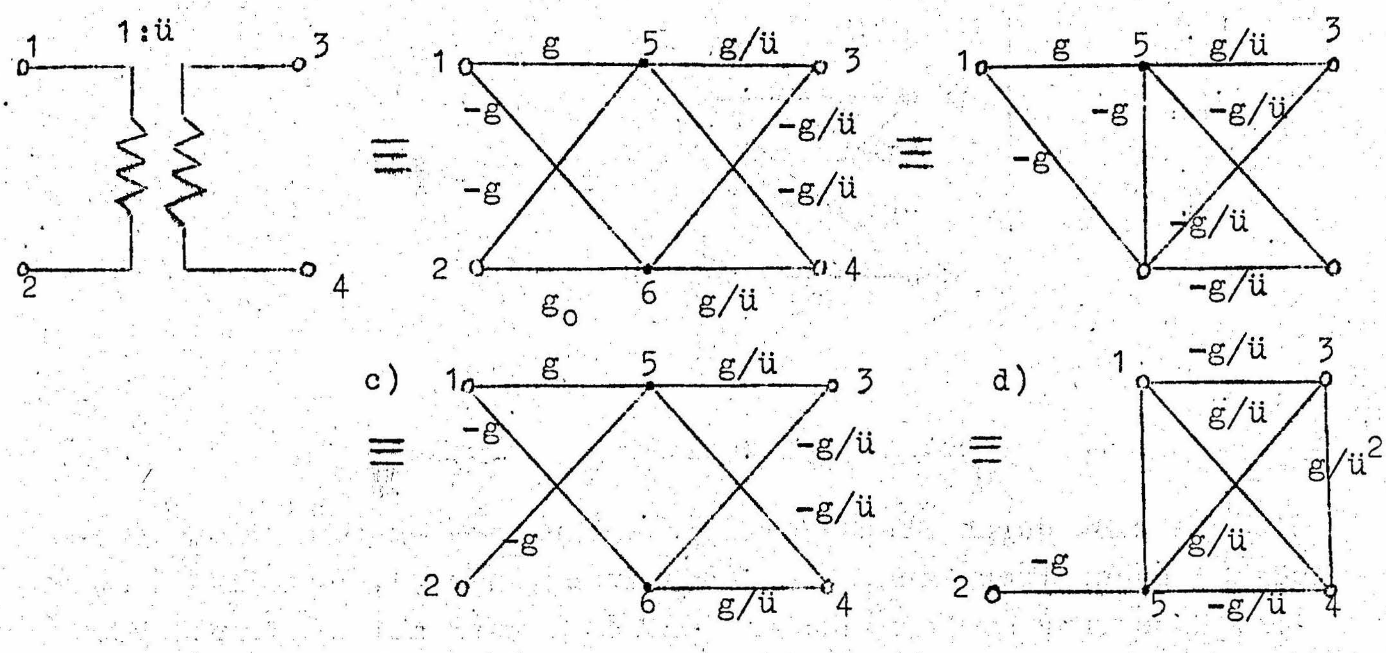

Abb. 2. Idealer Uebertrager mit zwei getrennten Wicklungen und seine Ersatzbilder

massen ein: Wir betrachten die Schaltung a) zunächst als Vierpol 12/34. Legt man an 12 einen Leitwert G, so misst man an 56 nach links einen Leitwert $-g^2/G$, also an 34 einen Leitwert $G/ü^2$. Wenn ü (positiv oder negativ) reell ist, verhält sich die Schaltung also tatsächlich wie ein idealer Uebertrager mit dem Windungszahlverhältnis ü. Andererseits stimmt die Ersatzschaltung a) mit dem Uebertrager auch als Vierpol 24/13 überein, denn die Leitwerte y_{14}, y_{23}, y_{24} und y_{13} verschwinden bei beiden Schaltungen unabhängig vom Wert des Leitwertes g_o und unabhängig von der Beschaltung an 12 oder 34. Es ist nämlich mit z.B. 2 als Bezugsknoten nach Technischem Bericht Nr. 8, Gl. (16)[2]:

$$y_{32} = \det Y/\det_{33}Y \quad \text{und} \quad y_{42} = \det Y/\det_{44}Y$$

Darin ist, wenn man Abb. 2a) an 12 und 34 mit den Leitwerten G_{12} bezw. G_{34} beschaltet (vgl. Technischer Bericht Nr. 6):

[2] Darin bedeutet z.B. $\det_{33}Y$ die Unterdeterminante, die aus der Matrix Y durch Streichen der 3. Zeile und der 3. Spalte entsteht.

$$
\det Y = \begin{vmatrix} G_{12} & 0 & 0 & -g & g \\ 0 & G_{34} & -G_{34} & -g/ü & g/ü \\ 0 & -G_{34} & G_{34} & g/ü & -g/ü \\ -g & -g/ü & g/ü & 0 & 0 \\ g & g/ü & -g/ü & 0 & g_0-g \end{vmatrix} = 0
$$

$$
\begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}
$$

weil Spalte 3 und 4 bis aufs Vorzeichen übereinstimmen. Ausserdem ist $\det_{33} Y \neq 0$ und $\det_{44} Y \neq 0$, so dass $y_{32} = 0$ ist, unabhängig von G_{12}, G_{34} und g_0. Entsprechend zeigt man, dass auch $y_{13} = 0$ und $y_{14} = 0$ ist. Die Aequivalenz der Abb. 2 gilt also allpolig.

Die Ersatzschaltung a) besteht aus insgesamt 8 Zweipolen. Der eine Leitwert g_0 ist aber, wie wir gesehen haben, beliebig. Wir können ihm auch die Werte $g_0 = \infty$ und $g_0 = 0$ geben und kommen damit zu den beiden Ersatzschaltungen b) und c) mit nur 7 Zweipolen. An der Schaltung c) lässt sich eine Stern-Dreiecks-Umwandlung am Knoten 6 durchführen, weil die Summe der von 6 ausgehenden Leitwerte $\Sigma = g \neq 0$ ist. Man erhält damit Schaltung d).

4. Der ideale Uebertrager mit mehr als zwei getrennten Wicklungen

Auch für ideale Uebertrager mit mehr als zwei Wicklungen lassen sich die äquivalenten Zweipolnetze angeben, indem man jede Wicklung durch einen Negativdualübersetzer ersetzt. Abb. 3 zeigt als Beispiel drei Wicklungen.

Die Knoten 7, 8, 9 der Ersatzschaltung sind unzugänglich. Ist 56 offen, dann ist 79 kurzgeschlossen, und man erhält, wie es sein muss, die Schaltung Abb. 2a). Ist andererseits 56 kurzgeschlossen, dann ist zwischen 7 und 9 eine Unterbrechung, d.h., 78 und 98 sind ebenfalls offen, so dass 12 und 34 kurzgeschlossen sind, entsprechend der Tatsache, dass bei Kurzschluss einer Wicklung sämtliche anderen ebenfalls kurzgeschlossen sind. Der Leitwert g_0 ist in der Schaltung beliebig, darf also insbesondere durch eine Unterbrechung oder einen Kurzschluss ersetzt werden.

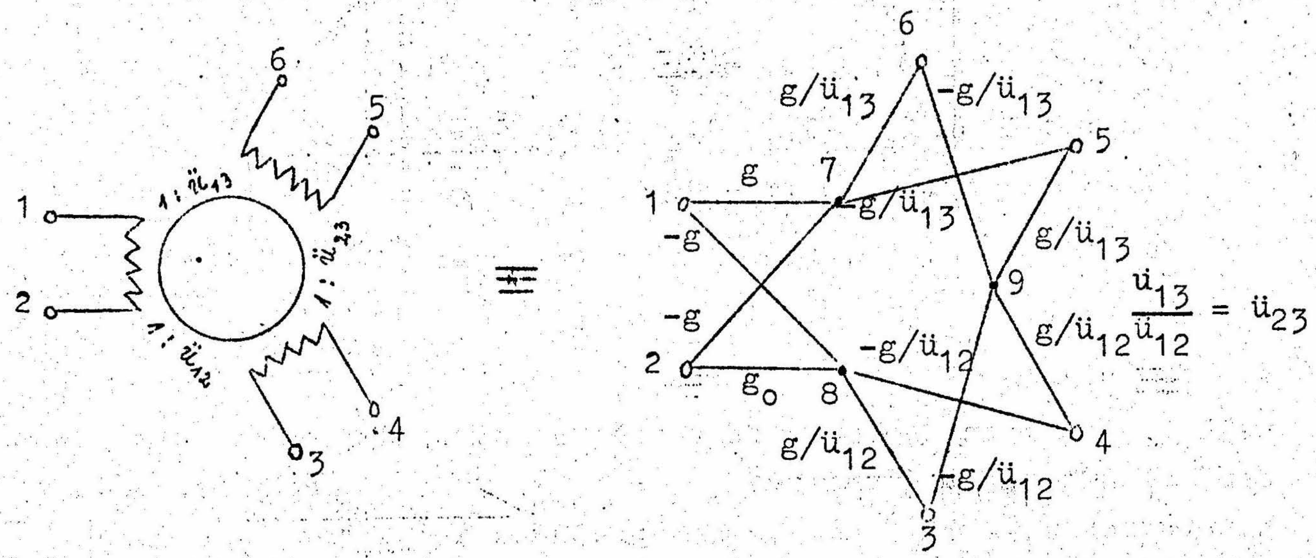

Abb. 3. Ersatzbild eines idealen Uebertragers mit drei getrennten Wicklungen

Es ist leicht zu sehen, wie die Zweipolnetze für mehr als drei Wicklungen aussehen.

5. Der ideale Sparübertrager

Eine angezapfte Wicklung erhalten wir, wenn wir zwei benachbarte Klemmen von zwei getrennten Wicklungen zusammenlegen, z.B. in Abb. 3 die Klemmen 4 und 5. Wir wollen im folgenden den besonders wichtigen Fall des Sparübertragers, d.h. nur einer angezapften Wicklung, näher betrachten. Man erhält sein Zweipolnetz mit einer Mindestzahl von Leitwerten, wenn man in Abb. 2d) die Klemmen 1 und 3 verbindet. (Ersatzschaltung a) der Abb. 4). Die beiden Ersatzbilder b) und c) entstehen aus a) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass man einen Leitwert an einem Klemmenpaar eines idealen Uebertragers durch einen solchen an einem anderen Klemmenpaar ersetzen kann, den man durch das Quadrat des Uebersetzungsverhältnisses zwischen diesen beiden Klemmenpaaren dividiert. Die Ersatzschaltung b) war im Technischen Bericht Nr. 8, Abb. 4, bereits unmittelbar abgeleitet worden.

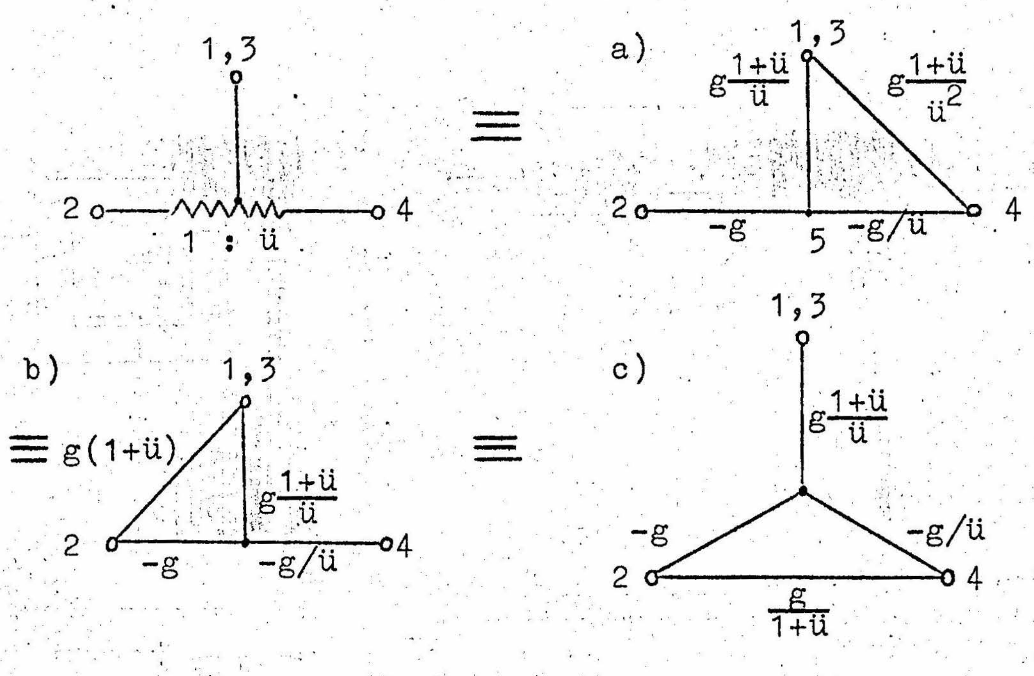

Abb. 4. Der ideale Sparübertrager und seine Ersatzbilder

6. Die Vorzeichen der Uebersetzungsverhältnisse idealer Uebertrager

a) Das Windungszahlverhältnis

Ein Uebertrager lässt sich nur dann durch magnetisch gekoppelte Wicklungen realisieren, wenn das Windungszahlverhältnis ü reell ist[3]; es kann aber positiv oder negativ sein. Wir müssen daher noch festlegen, was das eine und was das andere Vorzeichen bedeuten soll.

Wir betrachten den allgemeinsten Fall eines idealen Uebertragers mit mehreren getrennten Wicklungen, bei dem in den Klemmenpaaren die positiven und die negativen Klemmen bezeichnet sind. Wir legen nun die beiden negativen Klemmen der beiden Wicklungen, deren Windungszahlverhältnis wir betrachten wollen, zusammen. Wenn dann die eine Wicklung gleichsinnig in die andere übergeht (Abb. 5a), dann soll das Windungszahlverhältnis positiv sein ($ü > 0$); laufen jedoch von den beiden negativen Klemmen aus beide Drähte teilweise bifilar (Abb. 5b), dann sei $ü < 0$.

---

[3] Der Leitwert g in Abb. 4 ist beliebig, er kann also auch komplex sein.

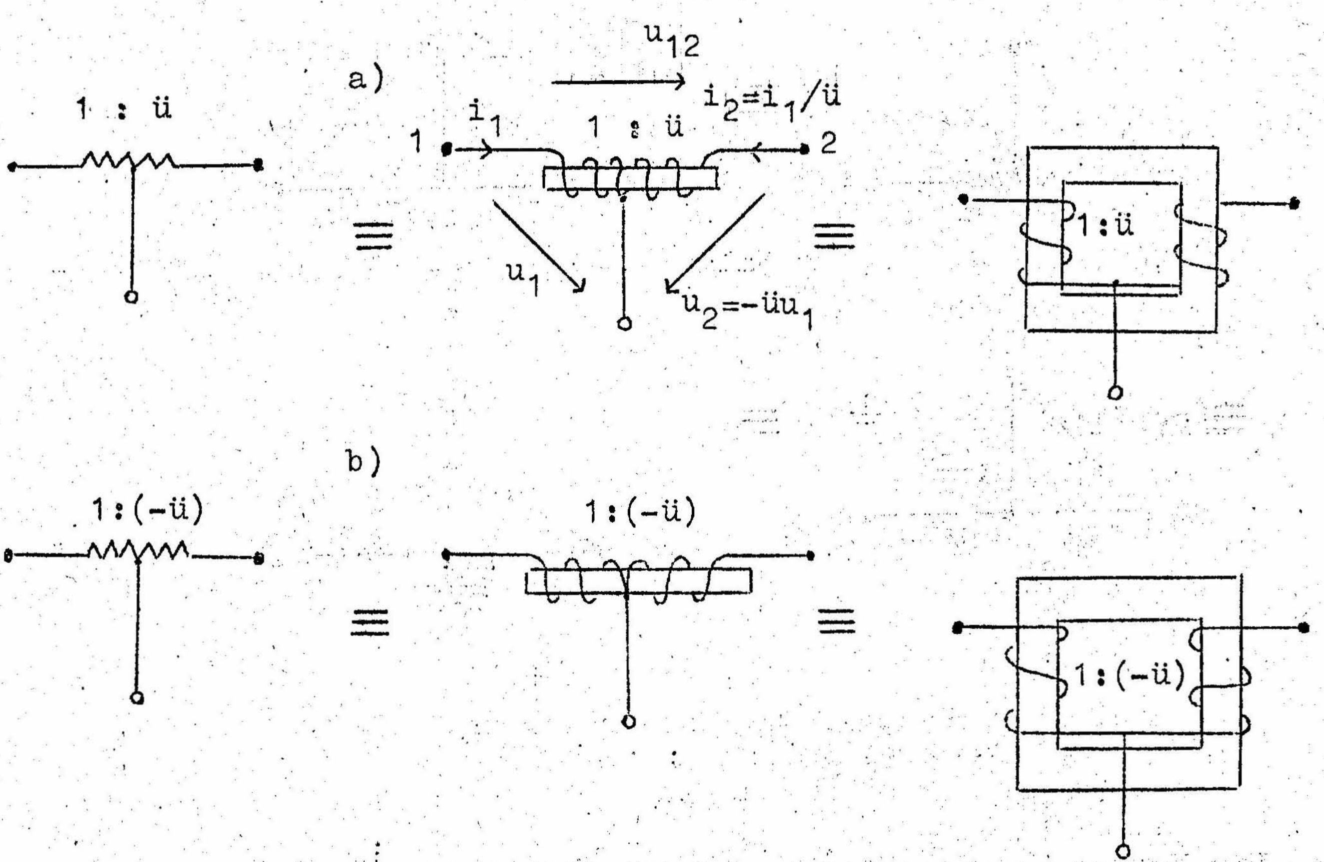

Abb. 5 Positives und negatives Windungszahlverhältnis beim idealen Sparübertrager

b) Das Spannungsverhältnis

Diese Vorzeichenfestlegung des Windungszahlverhältnisses setzt lediglich voraus, dass man den Uebertrager als Mehrpol aufgefasst hat, dass man also die Klemmenpaare und die Spannungsrichtungen festgelegt hat. Legt man nun auch noch durch Annahme symmetrischer Vorzeichen die Stromrichtung fest, dann erhält man auch die Vorzeichen des Spannungsverhältnisses und des Stromverhältnisses.

Bei dem fortlaufend gewickelten Sparübertrager nach Abb. 5a) ist

$$\frac{u_{12}}{u_1} = \frac{1 + ü}{1}$$

Andererseits ist $u_{12} = u_1 - u_2$. Daraus ergibt sich $u_2/u_1 = -ü$. Die Ströme i_1 und i_2 umkreisen in diesem Fall den gemeinsamen Magnetfluss gegensinnig. Entsprechend erhält man für einen gleichsinnigen Umlauf das positive Vorzeichen, so dass sich die Regel ergibt:

Bei symmetrischen Vorzeichen ist bei gleichsinnigem Umlauf der Ströme um das Magnetfeld das Spannungsverhältnis gleich dem positiven Windungszahlverhältnis ü, bei gegensinnigem Umlauf gleich dem negativen Windungszahlverhältnis.

d) Das Stromverhältnis

Das Stromverhältnis ergibt sich beim idealen Uebertrager durch die Bedingung, dass die Summe der Augenblicksleistungen an beiden Klemmenpaaren gleich Null ist. Es ist also

$$\mathrm{Re}\left[u_1 i_1^* + u_2 i_2^* + (u_1 i_1 + u_2 i_2)\, e^{2j\omega t}\right] = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn bei einem Spannungsverhältnis u_2/u_1 = -ü das Stromverhältnis i_2/i_1 = 1/ü gesetzt wird (ü reell). Man erhält die Regel:

Das Stromverhältnis bei einem idealen Uebertrager ist bei symmetrischen Vorzeichen negativ reziprok zum Spannungsverhältnis.

7. Der kapazitätsfreie Uebertrager mit reeller Gegeninduktivität

Der Uebertrager, wie er in der Praxis verwendet wird, unterscheidet sich von dem bisher betrachteten idealen Uebertrager dadurch, dass er Streuung und Verluste hat und ausserdem eine endliche Induktivität. Seine Gegeninduktivität wollen wir als reell annehmen; von seiner Eigenkapazität wollen wir absehen, weil man sie erforderlichenfalls getrennt berücksichtigen kann.

Ein nichtidealer Uebertrager mit zwei Wicklungen lässt sich bekanntlich als Zusammenschaltung eines idealen Uebertragers mit einem Zweipolnetz darstellen, das aus den beiden Streuinduktivitäten und der Hauptinduktivität besteht (vgl.z.B. [3]). Für den idealen Uebertrager kann man darin das Ersatzbild nach Abb. 2d) setzen und bekommt dann nach einigen Umformungen das Ersatzbild der Abb. 6a), dessen Richtigkeit man auch unmittelbar durch Vergleich mit der Widerstandsmatrix und der Leitwertmatrix des nichtidealen Uebertragers nachweisen kann. Für einen solchen

Uebertrager gelten für positives Windungszahlverhältnis nämlich folgende Gleichungen:

$$u_1 = (j\omega L_1 + R_1)\, i_1 \qquad \text{für } i_2 = 0$$
$$u_2 = (j\omega L_2 + R_2)\, i_2 \qquad \text{für } i_1 = 0$$
$$-u_2 = j\omega L_{12}\, i_1 \qquad \text{für } i_2 = 0$$
$$-u_1 = j\omega L_{12}\, i_2 \qquad \text{für } i_1 = 0$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 + R_1 & -j\omega L_{12} \\ -j\omega L_{12} & j\omega L_2 + R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \equiv \left[\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} + W \right] \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}.$$

Man kann die beiden Verlustwiderstände R_1 und R_2 in Reihe mit den Klemmen 1 und 2 schalten und sich im übrigen auf die Betrachtung des verlustfreien Uebertragers beschränken. Für diesen ist die Leitwertmatrix

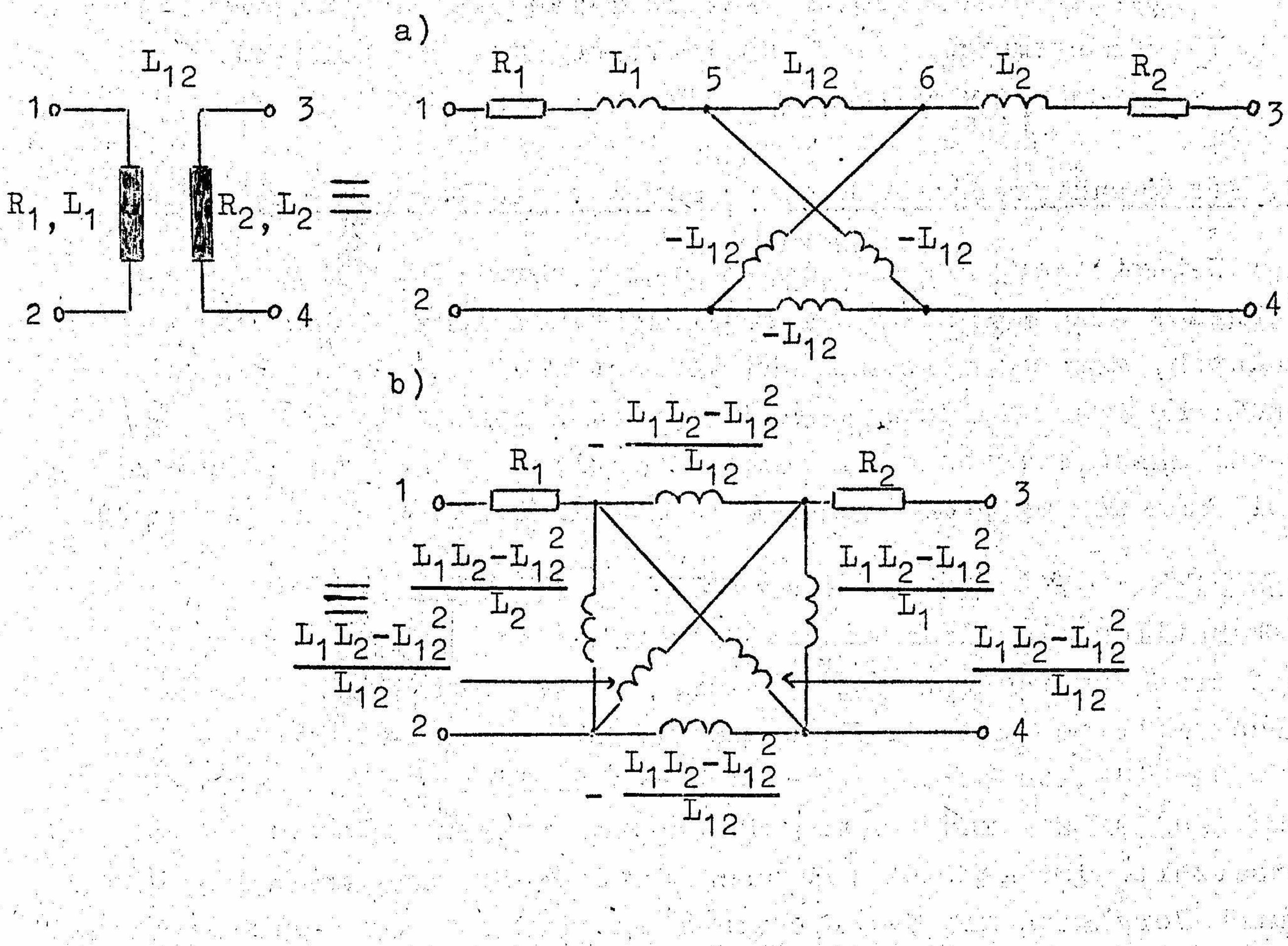

Abb. 6. Ersatzbilder eines nichtidealen Uebertragers mit zwei getrennten Wicklungen

$$Y = W^{-1} = \frac{1}{-\omega^2(L_1L_2-L_{12}^{\;2})}\begin{pmatrix} j\omega L_2 & j\omega L_{12} \\ j\omega L_{12} & j\omega L_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix} .$$

Man sieht leicht ein, dass das Ersatzbild Abb. 6a) tatsächlich die beiden Leerlaufwiderstände $j\omega L_1$ und $j\omega L_2$ sowie die beiden Kurzschlussleitwerte $y_{11} = L_2/j\omega(L_1L_2 - L_{12}^2)$ und $y_{22} = L_1/j\omega(L_1L_2 - L_{12}^{\;2})$ hat, womit seine Richtigkeit bewiesen ist.

Durch Stern-Dreiecks-Umwandlung des Knotens 5 in Abb. 6a) und anschliessende Stern-Vierecks-Umwandlung des Knotens 6 erhält man das Ersatzbild 6b), das bereits vom WALLOT [4] angegeben wurde. Für feste Kopplung ($L_1L_2-L_{12}^{\;2} = 0$) werden diese Ersatzbilder unbrauchbar, was man an Abb. 6b) unmittelbar erkennt.

Die Aequivalenz Abb. 6a) und 6b) gilt allpolig, denn z.B. zwischen den Klemmen 2 und 4 ist in allen drei Schaltungen der Leitwert gleich Null. Verbindet man diese Klemmen 2 und 4, so erhält man einen Sparübertrager und die X-Schaltung der Abb. 6a) geht in eine π-Schaltung über. Diese lässt sich in eine T-Schaltung umwandeln, und man erhält so das bekannte sog. Transformatorersatzbild Abb. 7. Dieses Ersatzbild gilt für den Sparübertrager allpolig. Es wird jedoch meist auch für den Uebertrager mit zwei getrennten Wicklungen angewendet und gilt dann natürlich nur als Vierpoläquivalenz.

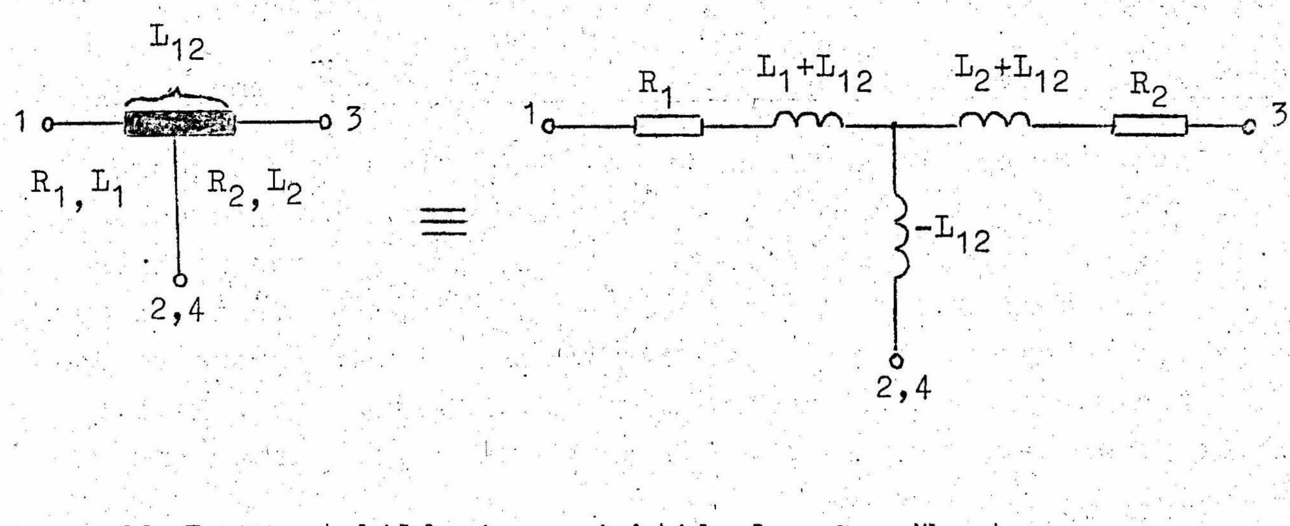

Abb.7. Ersatzbild eines nichtidealen Sparübertragers

8. Der beschaltete ideale Sparübertrager

Der unbeschaltete Sparübertrager der Abb. 4 kommt in den praktischen Schaltungen immer im Zusammenhang mit Zweipolen vor. Wir können häufig eine wesentliche Vereinfachung dadurch erreichen, dass wir diesen unbeschalteten Sparübertrager mit einem Zweipol zusammenfassen, so dass der beschaltete Sparübertrager statt (4 + 1) Zweipole nur 3 Zweipole enthält. Das ist deshalb möglich, weil in den Ersatzbildern der Abb. 4 der Leitwert g noch völlig beliebig ist, da sein Wert in den idealen Uebertrager überhaupt nicht eingeht.

Der Sparübertrager kann entweder durch einen Parallelleitwert G zu einem der drei Klemmenpaare oder durch einen Reihenleitwert G an einer der drei Klemmen beschaltet werden; man kann also für jeden Beschaltungsfall sich eines von den drei Ersatzbildern der Abb. 4 heraussuchen und darin g so wählen, dass sich die beiden Parallelleitwerte bezw. Reihenleitwerte G und g aufheben. Ist z.B. G zu den Klemmen 1, 3 und 2 parallel geschaltet, so hat man nach Abb. 4b) $G = g\,(1 + ü)$ zu setzen, also $g = G/(1 + ü)$ und erhält so das aus nur drei Leitwerten bestehende Ersatzbild nach Abb. 8c). In dieser Abbildung sind im übrigen alle 6 Möglichkeiten der Beschaltung zusammengestellt. Ist insbesondere der Parallelleitwert G eine verlustlose Drossel, so erhält man das Ersatzbild einer verlustlosen festgekoppelten Gegeninduktivität, das aus dem Ersatzbild des nichtidealen Sparübertragers (Abb. 7) durch $R_1 = R_2 = 0$ und durch die Bedingung der festen Kopplung hervorgeht, die darin besteht, dass die Summe aller von den unzugänglichen Knoten ausgehenden Leitwerte verschwindet.

9. Beispiel zweier bedingt äquivalenter Uebertragerschaltungen

Die Realisierung einer verlustfreien festgekoppelten Gegeninduktivität ist praktisch mit verhältnismässig guter Annäherung möglich, ein idealer Uebertrager ist dagegen viel schwieriger zu realisieren, weil man zusätzlich die Bedingung einhalten muss, dass der Scheinwiderstand seiner Induktivität sehr gross gegenüber den übrigen Scheinwiderständen der Schaltung ist. Es ist daher immer erwünscht, einen idealen Uebertrager durch eine Gegeninduktivität zu ersetzen.

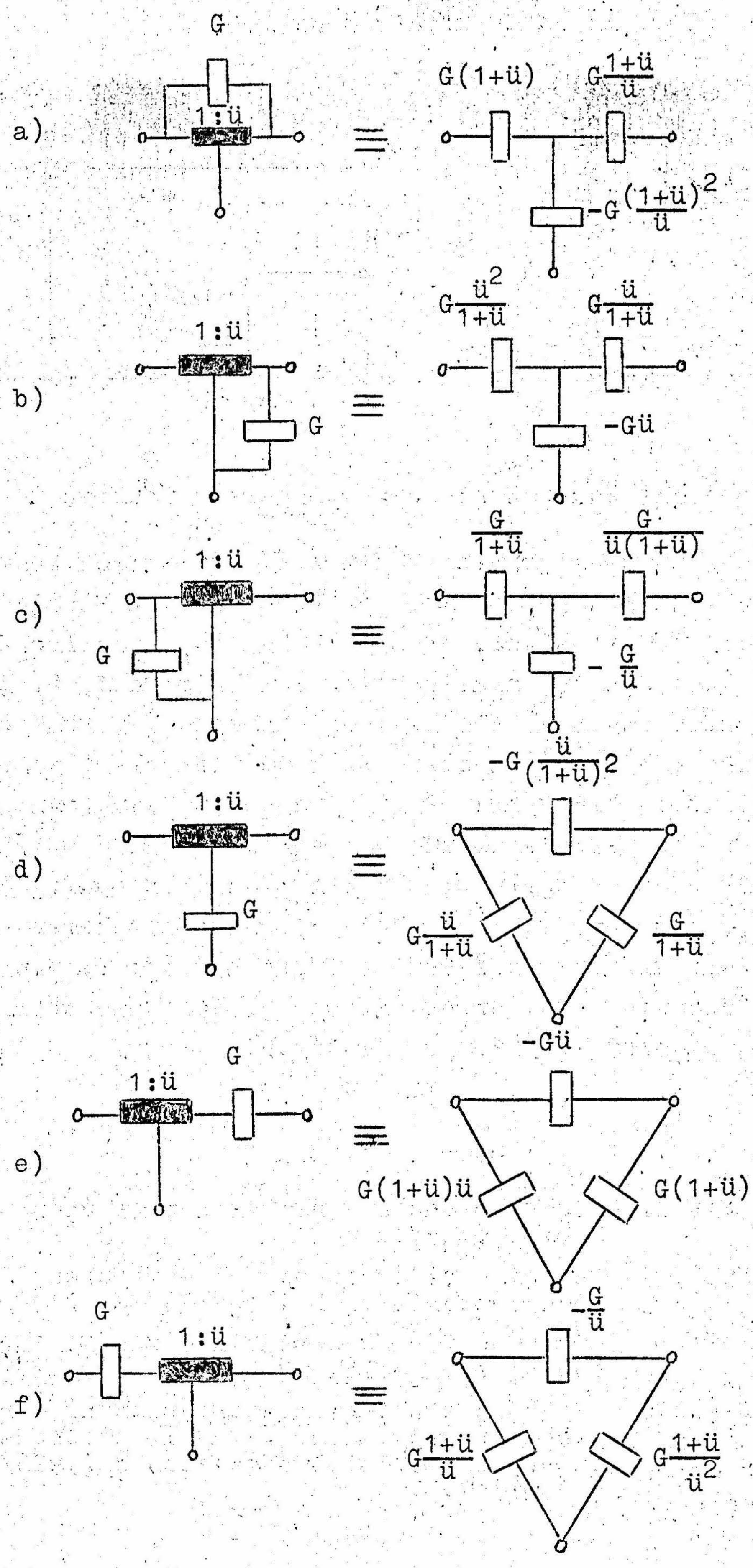

Abb. 8. Ersatzbilder des beschalteten idealen Sparübertragers

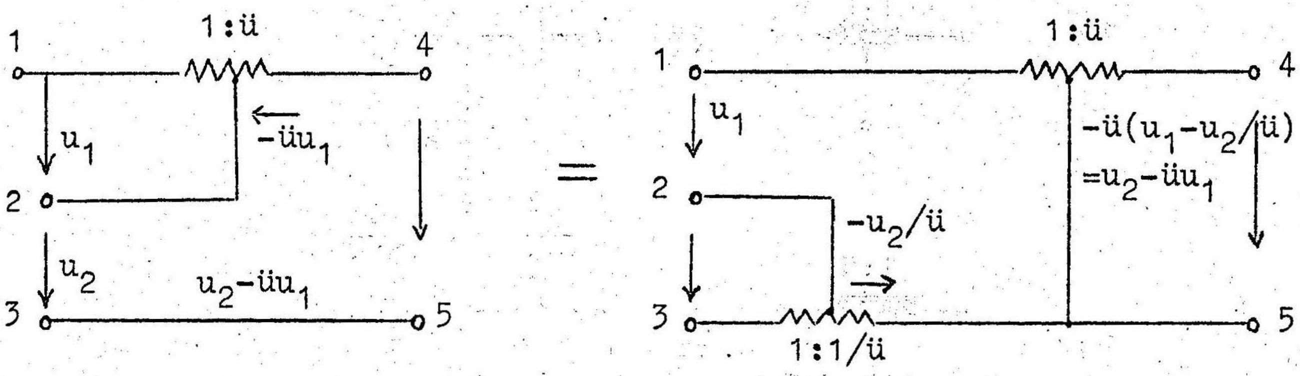

Abb. 9 Bedingt äquivalente Uebertragerschaltungen

Eine Möglichkeit hierfür bieten manchmal die beiden bedingt äquivalenten Schaltungen in Abb. 9. Diese beiden Schaltungen sind, wie man sofort sieht, nicht als Mehrpol an allen Klemmen äquivalent, sondern nur hinsichtlich der Klemmen 1, 2, 3 als Eingangsklemmen und 4, 5 als Ausgangsklemmen. Der Ersatz des einen idealen Uebertragers durch zwei ideale Uebertrager hat folgenden praktischen Sinn: Liegt an 23 eine Induktivität, so besteht also die neue Schaltung aus einer Gegeninduktivität und einem idealen Uebertrager. Diesen kann man aber häufig dadurch beseitigen, dass man die rechts folgenden Schaltelemente mit dem Quadrat seines Windungszahlverhältnisses umrechnet. Man kann in diesem Sonderfall den ursprünglichen idealen Uebertrager durch eine Gegeninduktivität realisieren.

Schrifttum

[1] Wilh. KLEIN, Die Berechnung linearer Schaltungen, AEÜ 11 (1957), H. 8.

[2] J. GENSEL, Negative Widerstände und Gyratoren, Nachrichtentechnik 7 (1957), S. 249 - 256.

[3] - Handbuch für Hochfrequenz- und Elektro techniker, Berlin 1949, Bd. 1, S. 175, Abb. 14g

[4] J. WALLOT Beweis der Determinantenbeziehung der Vierpoltheorie mit Hilfe von Umwandlungssätzen, Wiss. Veröff. Siemenskonzern 5 (1926/27), S. 121 - 127.